NO

Date 15/03/2018

Μάθημα 4ο

Α.Ο.Ε.Δ. → μεθ. C-R

ΕΠΑΡΚΕΙΑ

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ :

$$f(\underline{x}, \theta) = g(T(x), \theta) h(\underline{x})$$

Τότε $T(\underline{x})$ είναι επαρκής.

(1) $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. $U(\theta-1, \theta)$

πχ. $f(x, \theta) = 1 \quad , \quad \theta-1 < x < \theta$

$$f(\underline{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1 \quad , \quad \theta-1 < x_i < \theta$$

$$\left.\begin{array}{c} \theta-1 < x_1 < \theta \\ \theta-1 < x_2 < \theta \\ \vdots \\ \theta-1 < x_n < \theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_1 < \theta < x_1+1 \\ x_2 < \theta < x_2+1 \\ \vdots \\ x_n < \theta < x_n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}_{= X_{(n)}} < \theta < \underbrace{\min\{x_1+1, x_2+1, \ldots, x_n+1\}}_{= X_{(1)}+1}$$

$X_{(1)} \to \min x_i$

Άρα: $$\boxed{f(\underline{x}, \theta) = 1 \cdot I_{(x_{(n)}, x_{(1)}+1)}(\theta)}$$

όπου $I_{x \in A} = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$T = (X_{(1)}, X_{(n)})$

ή

$T = (X_{(n)}, X_{(1)})$

(Μας έδειξε το μπακαλίστικο)

NO

Date

(βλ εδώ 2)

Η σ.σ. μπορεί να έχει μεγαλύτερη διάσταση από την παράμετρο θ.

σ.σ. $(X_{(1)}+1,\ X_{(n)})$ 1-1 μετασχηματισμοί

$(X_{(1)},\ \frac{X_{(n)}}{n})$ (είναι το ίδιο).

2) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.

πχ

$$f(x,\mu,\sigma^2) = \frac{\sigma}{\pi}\cdot\frac{1}{\sigma^2+(x-\mu)^2}, \quad x\in\mathbb{R}$$

(από Cauchy κατανομή → χρησιμοποιείται ισχυρά για αντιπαράδ.)

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu,\sigma^2) = \frac{\sigma^n}{\pi^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma^2+(x_i-\mu)^2}$$

$T(x) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Η επαρκής σ.σ. είναι όλο το δείγμα

Θεώρημα Rao-Blackwell

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με σπп ή σ.п. $f(x,\theta)$ $\theta\in\Theta$.

Έστω $T(\underline{X})$ επαρκής σ.σ. για το θ και $U(\underline{X})$ αμερόληπτη σ.σ. για το θ.

Τότε:

η $U^* = E(U/T)$ είναι αμερόληπτη του θ με $\operatorname{Var} U^* \leq \operatorname{Var} U$

NO.

Date

Απόδειξη

$EU = \theta$.

αντίστοιχα του θ

Θ.ν.δ.ο. $E(U/T) = U^*$ αμερόληπτη της θ.

$= U^* (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

επαρκής => ∀ στατιστική το U^* είναι ανεξ. του θ

Το $E(U/T)$ λόγω της επάρκειας δικαιολογεί ότι $U^* = U^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Θ.ν.δ.ο. $EU^* = \theta$, ΣΑΣ πρέπει να υπολογίσω:

$$E(E(U/T)) = EU = \theta$$

Άρα αμερόληπτος.

Θ.ν.δ.ο. το U^* έχει μικρότερη διακύμανση.

Ισχύει: $\mathrm{Var}\,U = \mathrm{Var}(E(U/T)) + E(\mathrm{Var}\,U/T)$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}\,U = \mathrm{Var}(U^*) + E(\mathrm{Var}\,U/T) \Rightarrow$$

(μη αρνητικό)
(αναμ. τιμή μιας θετικής ποσότητας)

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Var}(U^*) \leq \mathrm{Var}\,U}$$

Συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης

Πρέπει να επιδιώκω να βρίσκω αμερόληπτους εκτιμητές που είναι συναρτήσεις της επαρκούς σ.σ. γιατί αυτές έχουν μικρότερη διακύμανση σε σχέση με αυτές που δεν είναι επαρκούς

NO

Date

ΕΑΣ όταν βρίσκω την επάρκεια να περιμένω ότι ο εκτιμητής θα είναι συνάρτηση αυτής

Ορισμός πληρότητας

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π. ή σ.π. $f(x,\theta)$ $\theta \in \Theta$.

Λέμε ότι η σσ. $T(X)$ είναι πλήρης για την θ αν-ν:

$$E\, h(T) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

Εκτός, πιθανόν, από σημεία για τα σημεία για τα οποία η πιθανότητα είναι μηδέν $\forall \theta \in \Theta$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΤΩΝ X_i (ΣX_i), όταν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ.

1ος τρόπος: Μέθοδος της ροπογεννήτριας.

Θυμίζω: $m_X(t) = E(e^{tX})$

Σκοπός: $Y = \Sigma X_i$ ($\leftarrow$ ο προσδιορισμός της)

$$m_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) =$$

$$= E(e^{tX_1} \cdot e^{tX_2} \cdots e^{tX_n}) \quad \underline{X_1, X_2, \ldots, X_n} \text{ ανεξάρτητες}$$

$$= \underline{E(e^{tX_1})} \cdot \underline{E(e^{tX_2})} \cdots \underline{E(e^{tX_n})}$$

$\rightarrow$ ίσα μεταξύ τους " $E(e^{tX})$

$$m_Y(t) = \left(E(e^{tX})\right)^n$$

$$= (m_X(t))^n$$

$$\Rightarrow \boxed{m_Y(t) = \left(E(e^{tX})\right)^n = (m_X(t))^n}$$

Δεν χρειάζεται να το θυμάμαι απ' έξω σαν τύπο (Μπορεί να χρειαστεί, όμως, να το αποδείξω)

NO

Date

1º
π.χ.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. $P(\theta)$

Τότε $Y = \Sigma X_i \sim$??

$$m_Y(t) = (m_X(t))^n \underset{X \sim P(\theta)}{=} \left(e^{\theta(e^t - 1)}\right)^n =$$

$$= e^{n\theta(e^t - 1)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ροπογεννήτρια της $P(n\theta)$ οπότε $Y \sim P(n\theta)$

2º
π.χ.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. $B(1,\theta)$. Τότε $Y = \Sigma X_i \sim$;;

$$m_Y(t) = (m_X(t))^n = \left(\theta \cdot e^t + (1-\theta)\right)^n$$

Την προσδιορίζω από τον πίνακα

$B(n,\theta)$

Θέλω ΣΑΣ να προκύπτει ροπογεννήτρια γνωστής κατανομής.

(Όταν ζητάει ΣX_i → τα ανωθεν)

3º
π.χ.

$X_1, X_2, \dots X_n$ τ.δ. $B(1,\theta)$

Ν.δ.ο. $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρης σ.σ.

αποδ. ότι είναι η επαρκής σ.σ.

Θ.ν.δ.ο. $E\,h(T) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$

διακριτή → άθροισμα

συνεχής → ολοκλήρωμα

NO.

Date

$T = \sum X_i \xrightarrow{X_i \sim B(1,\theta)} B(n,\theta)$ (Διακριτή)

$E\,h(T) = 0 \Rightarrow \underset{\substack{\text{δυνατές}\\ \text{τιμές } T}}{\sum} h(t) \cdot$ σ.π. του T. $= 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{n} h(t) \binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\theta)^n \cdot \sum_{t=0}^{n} h(t) \binom{n}{t} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^t = 0 \quad \forall \theta. \Rightarrow$$

$$\sum_{t=0}^{n} h(t) \binom{n}{t} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^t = 0 \quad \forall \theta$$

Θέτω $\zeta = \dfrac{\theta}{1-\theta}$ τότε η προηγ. σχέση. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{n} h(t) \binom{n}{t} \zeta^n = 0 \quad \forall \theta$$

με ζ θετικό αριθμό

$h(0) = h(1) = h(2) = \cdots = h(n) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow h(t) = 0 \ \forall t.$

4º N.δ.ο. Αν $T(\underline{x})$ είναι μία σσ. των
π.χ. $T(\underline{x})$ να ακολουθεί ομοιόμορφη $T(\underline{X}) \sim U(0,\theta)$
Τότε $T(\underline{x})$ πλήρης

Θ.ν.δ.ο. $Eh(T) = 0 \ \forall \theta \in \Theta \Rightarrow h(t) = 0 \ \forall t$.

διακριτή ή συνεχής

Αφού έχω ομοιόμορφη -> συνεχής.

Άρα: $$E\,h(T) = \int_0^{\theta} h(t)\,\frac{1}{\theta}\,dt = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

πεδίο ορισμού της T. σ.π.π. της T.

$$\Rightarrow \int_0^{\theta} h(t)\,dt = 0 \xrightarrow[\text{προς } \theta]{\text{παρ/ζω ως}} h(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

$\Longrightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$ Άρα αποδείξαμε την πληρότητα.

5º $T(\underline{X}) \sim U(-\theta,\theta)$
π.χ. Ν.δ.ο. η Τ δεν είναι πλήρης.

Για ν.δ.ο. η Τ δεν είναι πλήρης αρκεί να βρω μία συνάρτηση του Τ, έστω $h(T)$, με:
$E(h(T)) = 0 \ \forall \theta$
και
$h(t) \neq 0$.

ξεκινάω από την πιο απλή.
$$ET = \frac{-\theta+\theta}{2} = 0$$
ομοιόμορφη -> τύπολόγο

Όμως η Τ δεν είναι πάντα μηδέν.
άρα όχι πλήρης.

NO.

Date

Θεώρημα Lehmann - Scheffé

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τδ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π. ή σπ. $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$.

Έστω $T(\underline{X})$ <u>πλήρης</u> + <u>επαρκής</u> σ.σ. του θ

και $U = U(T)$ μια αμερόληπτη σσ. του θ.

<u>Τότε:</u> ο U είναι Α.Ο.Ε.Δ. της θ.

<u>Απόδειξη.</u>

Έστω U^* ένας άλλος αμερόληπτος της θ συνάρτηση του T, δλδ $EU^* = \theta$.
Επιπλέον $EU = \theta$.

$$\left.\begin{aligned} &EU^* = \theta \\ &EU = \theta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underbrace{E(U^* - U) = 0}$$

συνάρτηση του T — από εκφώνηση συνάρτηση του T.

Άρα μέση τιμή συνάρτησης του $T = 0$

Επομένως βρήκα $h(T) = U^*(T) - U(T)$ τ.ω.
$E\,h(T) = 0 \;\forall \theta \Longrightarrow h(t) = 0$ άρα $U^* = U$

Αποδεικνύει ότι:

> Ο αμερόληπτος εκτιμητής που είναι συνάρτηση της επαρκούς + πλήρης είναι μοναδικός.

Έστω U^{**} ένας άλλος αμερόληπτος της θ <u>όχι</u> συνάρτηση του T, δλδ $EU^{**} = \theta$.

Ξέρεις κάποιον άλλον αμερόληπτο καλύτερο ΑΟΕΔ με μικρότερη διακύμανση;

Εφαρμόζοντας Θεώρημα Rao – Blackwell έχω ότι:

$E(E(U^{**} \mid T))$ αμερόληπτη με:

$$Var(\underbrace{E(U^{**} \mid T)}_{\text{συνάρτηση του } T}) \leq Var\, U^{**}$$

$$\Downarrow$$

$E(E(U^{**} \mid T)) = \theta \rightarrow$ ΑΟΕΔ.

έχω έναν αμερόληπτο εκτιμητή συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους $\Rightarrow$ ΑΟΕΔ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΟΕΔ

1ο ΒΗΜΑ: Βρίσκω επαρκή σ.σ.

2ο ΒΗΜΑ: Αποδεικνύω ότι είναι και πλήρης η επαρκής που βρήκα

3ο ΒΗΜΑ: Βρίσκω αμερόληπτο συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους.

Ορισμός Συνέπειας

Η ακολουθία εκτιμητών $\{T_n\}$ ή ο εκτιμητής T_n μιας παραμέτρου θ είναι (ασθενικά) συνεπής αν $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει:

$$\lim_{n \to \infty} P(\theta - \varepsilon < T_n < \theta + \varepsilon) = 1$$

Επεξήγηση: Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα ο T_n να λάβει τιμή που διαφέρει από το θ περισσότερο από τη σταθερά ε τείνει στο 0 όταν το n τείνει στο άπειρο

Ικανές Συνθήκες: Αν T_n:

(1) $\underbrace{E T_n = \theta}_{\downarrow\ \text{αμερόληπτος}}$ ή $\underbrace{E T_n \to \theta}_{\downarrow\ \text{ασυμπτωτικά αμερόληπτος}}$ όταν $n \to \infty$

(2) $Var\, T_n \longrightarrow 0$ όταν $n \to \infty$ $\left(|Var\, T_n| < \varepsilon^{\varepsilon \to 0}\right)$

Τότε: $T_n \xrightarrow{κ.π.} \theta$,

κ.π. → κατά πιθανότητα.

C-R / Lehmann-Scheffé

NO.

Date

Άσκηση 1

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $B(1,\theta)$

Να βρείτε ΑΟΕΔ της θ και της $\theta(1-\theta)$

$$f(x,\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \quad x = 0,1$$

Το πεδίο ορισμού ανεξ. του θ.

Άρα ελέγχω αν ανήκει στην εκθ. οικογ. κατανομών.

$$f(x,\theta) = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x (1-\theta) = e^{x\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)} (1-\theta), x=0,1$$

ανήκει

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i} =$$

$$= g\left(\sum x_i, \theta\right) h(\underline{x})$$

Άρα $T = \sum X_i$ επαρκής σσ.

Η ισότητα στην C-R επιτυγχάνεται:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln \prod f(x_i,\theta) = K(\theta,n)\left(U - g(\theta)\right)$$

Τότε U: ΑΟΕΔ της $g(\theta)$

$$\ln \prod f(x_i,\theta) = \sum x_i \ln\theta + \left(n - \sum x_i\right)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln \prod f(x_i,\theta) = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n - \sum x_i}{1-\theta} =$$

$$= \frac{\sum x_i - \sum x_i\theta - n\theta + \sum x_i\theta}{\theta(1-\theta)} = \frac{\sum x_i - n\theta}{\theta(1-\theta)}$$

Επομένως $\frac{\partial}{\partial\theta} \ln \prod f(x_i,\theta) = \frac{n}{\theta(1-\theta)}\left[\frac{\sum x_i}{n} - \theta\right]$

Άρα: $\frac{\sum X_i}{n}$ ο ΑΟΕΔ του θ.

NO.

Date

Για το $\theta(1-\theta)$ δεν μπορώ να βρω εκτιμητή με το C-R διότι δεν είναι γραμμική συνάρτηση του θ.

$\Downarrow$

Lehmann - Scheffé
για το $\theta(1-\theta)$

(1º) Έχουμε δείξει ότι $T=\sum X_i$ επαρκής για το θ. (*)

(2º) Θ.δ.ο. $T=\sum X_i$ πλήρης

(*) Άρα επαρκής και για το $\theta(1-\theta)$ ως 1-1 και επί μετασχηματισμός.
$\theta \in (0,1)$

(Βλέπε (1º) π.χ. σημείωμα από πληρότητα)

$E\sum X_i = \sum E X_i = n\theta \Rightarrow E\frac{\sum X_i}{n} = \theta.$

Στο πρώτο μάθημα δείξαμε ότι η δειγματική μέση τιμή είναι αμερόληπτος εκτιμητής της πληθυσμιακής μέσης τιμής: $E\bar{X}=\mu=\theta$.

Θέλαμε ΑΟΕΔ του $\theta(1-\theta)$

Είναι: $\theta(1-\theta) = \operatorname{Var}X$ $\quad$ X: δικωνυμική $B(1,\theta)$

$ES^2 = \sigma^2 = \theta(1-\theta)$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

Για να είναι ΑΟΕΔ $\rightarrow$ συνάρτηση του $\sum X_i$

Όταν μου ζητάνε να βρω ΑΟΕΔ για τα 3 π.χ. $\theta, \theta^2, e^{-\theta}$ είναι σαν να μου λέει ότι σίγουρα θα χρησιμοποιήσω το Θ. Lehmann' πάρα πολύ

$$\sum(X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2 = \sum X_i^2 - n\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)^2 =$$

$$\left(X \sim B(1,\theta) \Rightarrow \underline{\underline{X_i = 0,1}}\right)$$

Άρα $\sum X_i^2 = \sum X_i$

$$= \sum X_i - n\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)^2$$

συνάρτηση του $\sum X_i$

Άρα ΑΟΕΔ του $\theta(1-\theta)$

<u>Άσκηση</u>

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $P(\theta)$

$$f(x,\theta) = \frac{e^{-\theta}\,\theta^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Βρες ΑΟΕΔ για $\theta, \theta^2, e^{-\theta}$.

<u>Λύση</u>.

Για το θ με C-R το έχουμε δείξει

<u>Βρίσκω επάρκεια</u>

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\,\theta^{X_i}}{X_i!} = \frac{e^{-n\theta}\,\theta^{\sum X_i}}{\prod X_i!} = g\left(\sum X_i, \theta\right) h(\underset{\sim}{X})$$

$T = \sum X_i$ επαρκής.

Όταν $X_i \sim P(\theta)$ τότε $\boxed{\sum X_i \sim P(n\theta)}$.

$$E h(T) = 0 \ \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \ \forall t$$

$$\sum_{t=0}^{+\infty} h(t) \underbrace{\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!}}_{\text{σ.π. του } T} = 0 \ \forall \theta \Rightarrow$$

$$\sum_{t=0}^{+\infty} h(t) \frac{n^t\,\theta^t}{t!} = 0 \quad \forall \theta$$

$h(0) = h(1) = \ldots = 0$

Άρα πληρότητα.

ΑΟΕΔ για θ, θ^2, $e^{-\theta}$.

$\Rightarrow$ αμερόληπτο συνάρτηση του T

$$E\left(\frac{\Sigma X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\Sigma E X_i = \frac{\Sigma\theta}{n} = \theta$$

αμερόληπτος του θ.

Ψάχνω $h(T)$ τ.ω. $E\,h(T) = \theta^2$

$E\,h(T) = e^{-\theta}$

$$E\,h(T) = \sum_{t=0}^{+\infty} h(t)\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!} = \theta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{+\infty} h(t)\frac{n^t\theta^t}{t!} = \theta^2 e^{n\theta} \Rightarrow$$

$$\sum_{t=0}^{+\infty} h(t)\frac{n^t\theta^t}{t!} = \theta^2 \cdot \sum_{t=0}^{+\infty}\frac{(n\theta)^t}{t!} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{+\infty} h(t)\frac{n^t\theta^t}{t!}} = \underbrace{\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{n^t}{t!}\theta^{t+2}} \quad \forall\theta \Rightarrow$$

$$t+2=y$$

$$\sum_{t=0}^{+\infty} h(t)\frac{n^t\theta^t}{t!} = \sum_{y=2}^{+\infty}\frac{(n)^{y-2}}{(y-2)!}\cdot\theta^y \Rightarrow$$

$$\sum_{t=0}^{+\infty} h(t)\frac{n^t\theta^t}{t!} = \sum_{t=2}^{+\infty}\frac{n^{t-2}}{(t-2)!}\cdot\theta^t$$

NO.

Date

Άρα πρέπει $h(0)=0$ και $h(1)=0$
και

$$h(t)\frac{n^t}{t!}=\frac{n^{t-2}}{(t-2)!} \quad t=2,3,\dots \Rightarrow$$

$$h(t)=\frac{t!}{(t-2)!}\frac{n^{t-2}}{n^t}=\frac{t(t-1)}{n^2}$$

ΑΟΕΑ: $\frac{T(T-1)}{n^2}$ για το θ^2

Για να βρω ΑΟΕΑ για το $e^{-\theta}$:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} h(t)\frac{n^t\theta^t}{t!}=e^{-\theta}\cdot e^{n\theta} \Rightarrow$$

$$\sum_{t=0}^{+\infty} h(t)\frac{n^t\theta^t}{t!}=e^{(n-1)\theta} \Rightarrow$$

$$\sum_{t=0}^{+\infty} h(t)\frac{n^t\theta^t}{t!}=\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{[(n-1)\theta]^t}{t!}$$

Άρα: $h(t)\frac{n^t}{t!}=\frac{(n-1)^t}{t!} \Rightarrow h(t)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^t$

ΑΟΕΑ $\left(\frac{n-1}{n}\right)^T$ για το $e^{-\theta}$